

ANDRZEJ SOKOŁOWSKI¹, MAŁGORZATA MARKOWSKA²ITERACYJNA METODA
LINIOWEGO PORZĄDKOWANIA OBIEKTÓW WIELOCECHOWYCH³

1. WSTĘP

Porządkowanie obiektów wielocechowych jest wykorzystywane w różnych dyscyplinach naukowych, przy sporządzaniu rankingów obiektów opisanych wieloma cechami oraz w zagadnieniach konstrukcji wskaźników agregatowych.

W literaturze polskiej tematyka ta była poruszana i dyskutowana od dość dawna, począwszy od artykułu Hellwiga (1968). Jednym z najsławniejszych zastosowań miary agregatowej i rangowania obiektów wielocechowych jest Indeks Rozwoju Społecznego (HDI). Historię powstania tej miary ciekawie opisują ul Haq (2003) i Sen (2000). Metody konstrukcji wskaźników agregatowych są różne. Niekiedy dzielono je na wzorcowe i bezwzorcowe, co jest o tyle niezręczne, że w tej metodologii zawsze występuje wzorzec (jawny lub ukryty). Pewną typową procedurę postępowania zaproponowano w *Handbook on Constructing Composite Indicators* wydanym przez OECD w 2005 roku (z perspektywy polskiego dorobku w tym zakresie można tu użyć słowa „dopiero”).

Celem pracy jest przedstawienie propozycji prostej, iteracyjnej metody liniowego porządkowania obiektów wielocechowych.

2. PORZĄDKOWANIE LINIOWE
– PROCEDURA TWORZENIA WSKAŹNIKA AGREGATOWEGO

Najpopularniejsza w polskiej literaturze procedura tworzenia wskaźnika agregatowego obejmuje etapy wymienione i krótko opisane poniżej.

Ustalenie kryterium ogólnego – jest ono niemożliwe do wyrażenia przy pomocy jednej zmiennej. Przykładami takich kryteriów mogą być: poziom rozwoju gospodarczego, jakość życia, ocena zawodnika w grach zespołowych, uciążliwość wydobywania w kopalni, jakość wyższej uczelni.

¹ Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Wydział Zarządzania, Katedra Statystyki, ul. Rakowicka 27, 31-510 Kraków, Polska.

² Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu, Wydział Ekonomii, Zarządzania i Turystyki, Katedra Gospodarki Regionalnej, ul. Nowowiejska 3, 58-500 Jelenia Góra, Polska, autor prowadzący korespondencję – e-mail: malgorzata.markowska@ue.wroc.pl.

³ Praca wykonana w ramach grantu Narodowego Centrum Nauki: 2015/17/B/HS4/01021.

Określenie kryteriów pomocniczych (ewentualne) – jest to pewnego rodzaju „rozebranie” kryterium ogólnego na sfery (części).

Ustalenie wstępnej listy zmiennych diagnostycznych – na podstawie wiedzy i doświadczenia badawczego, opinii ekspertów i przeglądu literatury, z uwzględnieniem dostępności danych.

Ustalenie ostatecznej listy zmiennych diagnostycznych – na tym etapie zazwyczaj zmienne grupuje się w podzbiory zmiennych skorelowanych i z każdej grupy wybiera zmienną reprezentantkę. Niestety wielu badaczy w tym etapie, niesłusznie eliminuje zmienne o współczynniku zmienności mniejszym od zadanej wartości (patrz Sokołowski, Sobolewski, 2016).

Określenie charakteru zmiennych – stymulanty, destymulanty, nominanty. Większość zmiennych ma charakter oczywisty – ich określenie jest intuicyjne, zaś w przypadkach wątpliwych warto zastosować procedurę Grabińskiego (1985) wykorzystującą fakt, że stymulanty powinny być dodatnio skorelowane ze stymulantami (podobnie jest dla destymulant) zaś ujemnie z destymulantami.

Ustalenie wag – jest to decyzja mająca kluczowe znaczenie dla ostatecznego porządku obiektów. Wydaje się, że najlepszym sposobem jest ustalenie wag na podstawie merytorycznej oceny cech dokonanej przez ekspertów. Najczęściej, w praktyce, stosuje się wagi równe, co jest wyjściem w miarę rozsądnym w myśl lekarskiej zasady *primo non nocere* (po pierwsze nie szkodzić). Nietrafnym posunięciem jest wyliczanie wag z wartości cech diagnostycznych, a szczególnie jako proporcjonalnych do współczynnika zmienności. Niewielu badaczy zdaje sobie sprawę z tego, że może występować tzw. ważenie mimowolne. Jeżeli na przykład przy ustalaniu agregatowego wskaźnika poziomu życia weźmiemy cztery cechy charakteryzujące opiekę zdrowotną, a tylko jedną charakteryzującą dochody (średnia płaca) to siłą rzeczy ta pierwsza sfera ma większy wpływ na wartość wskaźnika agregatowego. Innemu aspektowi ważenia mimowolnego poświęcona jest niniejsza praca.

Doprowadzenie cech do porównywalności – możliwe jest zastosowanie trzech podejść: normalizacji do przedziału $[0;1]$, standaryzacji oraz przekształceń ilorazowych. Na etapie tym następuje zazwyczaj ujednoczenie charakteru cech, czyli przekształcenie na stymulanty. Najpopularniejsza metoda przewiduje wykorzystanie następujących wzorów:

$$x_i^* = \frac{x_i - \min_i\{x_i\}}{\max_i\{x_i\} - \min_i\{x_i\}}, \text{ dla stymulant,} \quad (1)$$

$$x_i^* = \frac{\max_i\{x_i\} - x_i}{\max_i\{x_i\} - \min_i\{x_i\}}, \text{ dla destymulant.} \quad (2)$$

Agregacja zmiennych doprowadzonych do porównywalności – jest to z reguły wzór addytywny mający postać ważonej średniej arytmetycznej:

$$W_i = \frac{s}{\sum_{j=1}^m a_j} \sum_{j=1}^m a_j x_{ij}^*, \quad (3)$$

gdzie:

i – numer obiektu,

W_i – wartość wskaźnika agregatowego dla i -tego obiektu,

j – numer cechy,

m – liczba cech,

a_j – waga j -tej cechy,

x_{ij}^* – wartość zmiennej X_j obserwowanej na i -tym obiekcie (doprowadzonej do porównywalności),

s – współczynnik skali (zazwyczaj przyjmowany jako 1 lub 100).

Efektem zastosowania zaprezentowanej procedury są wartości wskaźnika agregatowego, które można porangować oraz przedstawić na wykresie.

Jak wspomniano, najpopularniejsza procedura sprowadzania cech do porównywalności to wykorzystanie wzorów (1) i (2). W tych przekształceniach wykorzystuje się zaobserwowane najmniejsze i największe wartości zmiennych. Jeżeli występują wartości odstające lub rozkład zmiennej jest bardzo asymetryczny, to w efekcie mamy do czynienia ze sztucznym ważeniem tej zmiennej. Przy asymetrii prawostronnej zmienna sztucznie zyskuje na zaznaczeniu, a przy lewostronnej – traci.

Dla ilustracji omawianego efektu w tabeli 1 przedstawiono wartości dwóch cech wykorzystywanych w rankingu uczelni opublikowanym przez „Perspektywy” w 2015 r. Cechy te są już doprowadzone do porównywalności poprzez przekształcenie ilorazowe polegające na dzieleniu wartości dla danej uczelni przez wartość dla uczelni najlepszej (tu mamy do czynienia ze stymulantami) i pomnożeniu wyniku przez 100. Większość zaprezentowanych w tabeli wartości Preferencji pracodawców jest większa od 50, podczas gdy Uznanie międzynarodowe jest zdominowane przez dwie uczelnie, a wiele z nich ma wręcz wartości mniejsze niż 10.

Tabela 1.

Wartości dwóch cech dla czołowych uczelni w 2015 r.

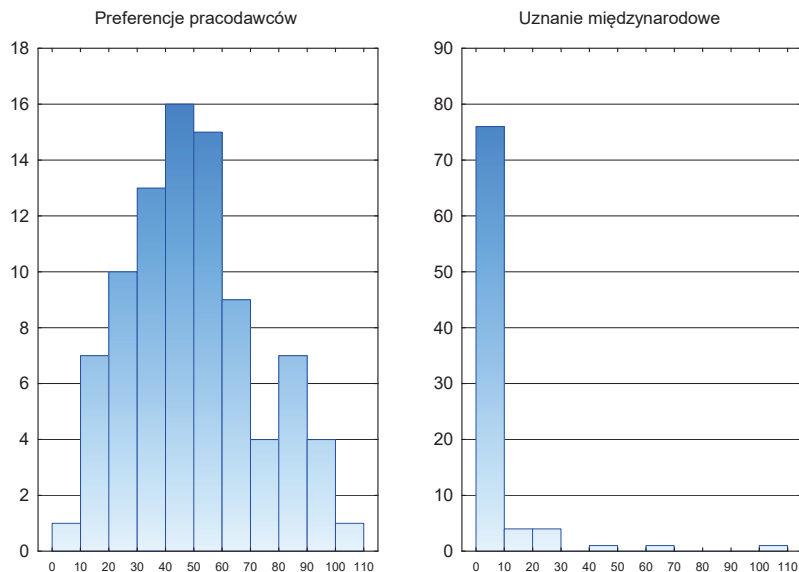
Uczelnia	Preferencje pracodawców	Uznanie międzynarodowe
Uniwersytet Jagielloński	92,62	69,43
Uniwersytet Warszawski	98,24	100,00
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu	80,82	11,57
Politechnika Warszawska	100,00	24,82
Politechnika Wrocławska	92,53	10,89
Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie	93,40	13,75
Uniwersytet Wrocławski	83,70	22,53
Warszawski Uniwersytet Medyczny	78,74	1,90
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu	72,20	22,53
Gdański Uniwersytet Medyczny	55,22	1,57
Politechnika Łódzka	69,25	2,93

Tabela 1. (cd.)

Uczelnia	Preferencje pracodawców	Uznanie międzynarodowe
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie	85,15	24,41
Uniwersytet Medyczny im. Karola Marcinkowskiego w Poznaniu	44,92	1,69
Politechnika Poznańska	81,38	2,91
Uniwersytet Medyczny im. Piastów Śląskich we Wrocławiu	61,61	0,88
Uniwersytet Łódzki	65,61	16,48
Politechnika Gdańska	57,73	0,89
Uniwersytet Gdański	66,74	2,68
Uniwersytet Medyczny w Łodzi	62,52	1,18
Uniwersytet Śląski w Katowicach	65,12	4,95
Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu	81,27	1,61
Politechnika Śląska w Gliwicach	84,22	4,37
Uniwersytet Medyczny w Białymstoku	46,84	1,22
Akademia Leona Koźmińskiego w Warszawie	50,61	43,17
Uniwersytet Medyczny w Lublinie	26,14	1,30

Źródło: na podstawie *Ranking szkół wyższych Perspektywy 2015* <http://www.perspektywy.pl/RSW2015/> (data dostępu 20 października 2016 r.).

Na rysunku 1 widać bardzo wyraźną asymetrię drugiej cechy i zdominowanie większości uczelni przez kilka najlepszych.



Rysunek 1. Rozkłady dwóch cech dla 100 najlepszych uczelni w rankingu „Perspektyw” z 2015 r.

Źródło: obliczenia własne.

3. PROPOZYCJA ITERACYJNEJ METODY LINIOWEGO PORZĄDKOWANIA OBIEKTÓW WIELOCECHOWYCH

Proponujemy nową, iteracyjną metodę porządkowania obiektów wielocechowych, która pozwala na ominięcie omówionej niedogodności metody klasycznej. Kolejne pozycje w rankingu wyznacza się stopniowo, po jednej w każdej iteracji, a następnie przyporządkowany obiekt jest eliminowany ze zbioru, w którym poszukujemy obiektu następnego w kolejności.

Procedurę tę można zapisać w następujących krokach:

1. Wyznaczenie minimalnych i maksymalnych wartości cech w aktualnym zbiorze (podzbiorze) obiektów.
2. Znalezienie najlepszego obiektu według procedury klasycznej (opisanej powyżej).
3. Przyporządkowanie temu obiektowi kolejnej rangi.
4. Usunięcie tego obiektu z przetwarzanego aktualnie zbioru.
5. Powrót do punktu 1.

Ten algorytm powtarzany jest aż do momentu, gdy w podzbiorze pozostaną trzy najgorsze obiekty. Im przyporządkowywane są ostatnie rangi.

Taka procedura wymaga również zaproponowania nowego sposobu wyznaczania wskaźnika agregatowego. Przy wyznaczaniu i -tej rangi wyliczamy:

$$D_{(i+1)} = \frac{W_{(i+1)}^i}{W_{(i)}^i}, \quad (4)$$

gdzie:

$D_{(i+1)}$ – współczynnik zmniejszania się wskaźnika agregatowego,

(i) – i -ta ranga,

$W_{(i)}^i$ – lokalny wskaźnik agregatowy wyliczony przy wyznaczaniu rangi i .

Ostateczna wartość wskaźnika agregatowego wyznaczana jest według wzoru (5):

$$W_{(k)} = W_{(1)}^1 \prod_{i=2}^k D_{(i)}. \quad (5)$$

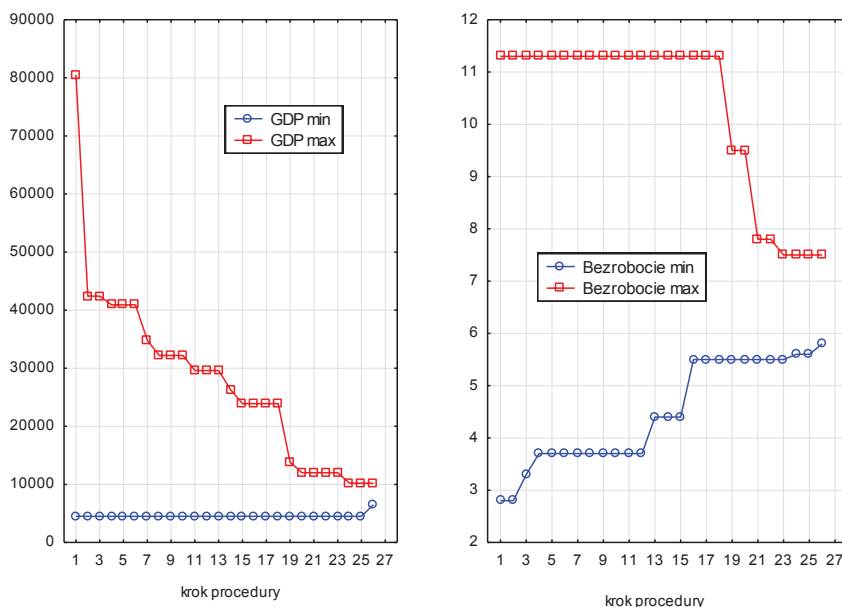
4. PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA PROPONOWANEJ PROCEDURY

Do ilustracji zaproponowanej procedury wykorzystano dane Eurostatu dotyczące 27 krajów UE, w roku 2008. Przyjęto sześć następujących cech statystycznych:

- dochód narodowy na mieszkańca w cenach rynkowych, w euro,
- wskaźnik inflacji rocznej (w procentach),
- przeciętne dalsze trwanie życia mężczyzn w momencie urodzin, w latach,
- współczynnik zgonów niemowląt (na 1000 urodzeń żywych),
- stopa bezrobocia (w procentach),
- procent mężczyzn zagrożonych ubóstwem.

Dochód narodowy i przeciętne dalsze trwanie życia to stymulanty, zaś pozostałe cechy to destymulanty. W procedurze cechy normalizowane są według wzorów (1) i (2), ale punkty odniesienia mogą się zmieniać, gdyż obiekty rangowane są po jednym, od najlepszego do najgorszego, usuwając ze zbioru te wartości, dla których rangi zostały już wyznaczone.

Na rysunku 2 pokazano jak zmieniają się punkty odniesienia dla dwóch cech – dochodu narodowego oraz stopy bezrobocia, zaś na rysunku 3 stosunek maksimum do minimum, dla wszystkich cech, w kolejnych krokach procedury.



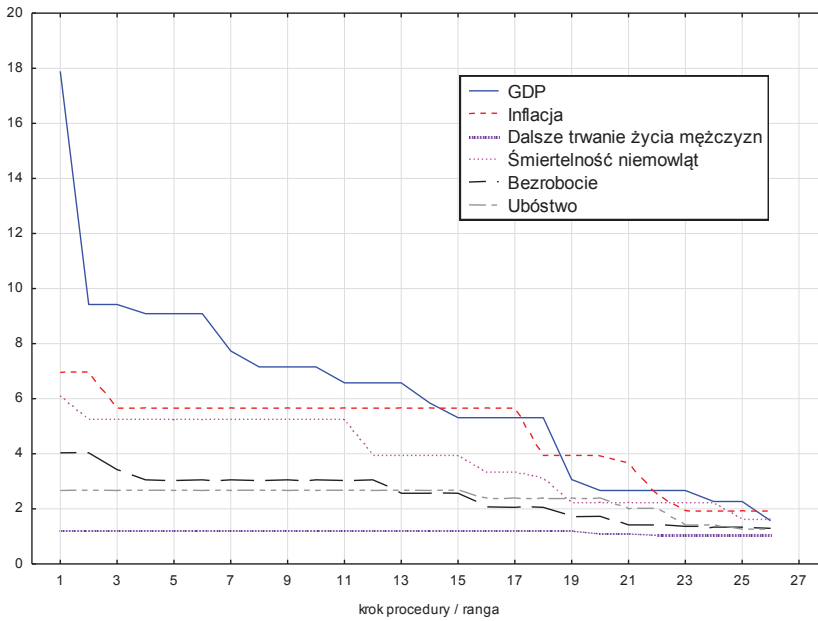
Rysunek 2. Punkty odniesienia w normalizacji zmiennych

Źródło: obliczenia własne.

Najbardziej wyraźnym zmianom ulegał stosunek największego dochodu do najmniejszego, a na zmianę punktów odniesienia największy wpływ miało wyodrębnienie (a następnie usunięcie) Luksemburga jako kraju o najwyższej randze.

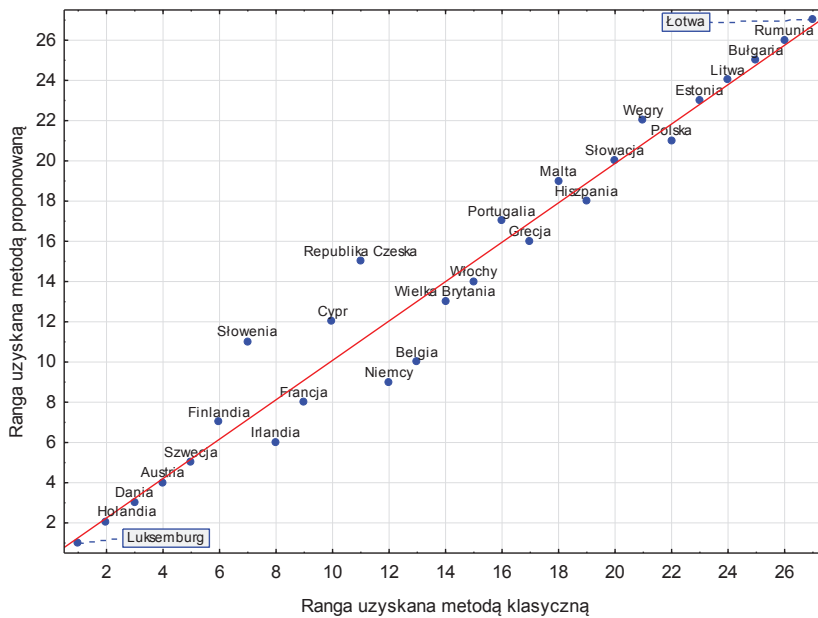
Na rysunku 4 widzimy, że przy porównaniu metody klasycznej z proponowaną, największe zmiany w porządku nastąpiły w środkowej strefie uporządkowania.

Ogólnie rzecz biorąc, dla 16 krajów z 27 analizowanych odnotowano zmiany miejsca w uporządkowaniu, w tym: poprawę o cztery pozycje dla Republiki Czeskiej oraz Słowenii, o dwie dla Cypru, a dla czterech innych krajów o jedną lokatę. Spadek o najwięcej pozycji w nowym uporządkowaniu zanotowano dla Belgii i Niemiec – o trzy, a o dwie dla Irlandii. Dla sześciu innych krajów (w tym dla Polski) – wystąpiła zmiana o jedno miejsce (por. tabela 2).



Rysunek 3. Stosunek maksimum do minimum w kolejnych krokach procedury

Źródło: obliczenia własne.



Rysunek 4. Porównanie rang uzyskanych metodą klasyczną i proponowaną metodą

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 2.

Porównanie wyników metod klasycznej i proponowanej

Państwo	Klasyczny wskaźnik agregatowy	Proponowany wskaźnik agregatowy	Rangi według wskaźnika klasycznego	Rangi według wskaźnika proponowanego	Różnica rang
Belgia	67,5	64,3	13	10	-3
Bułgaria	28,5	20,1	25	25	0
Czechy	69,1	58,7	11	15	4
Dania	79,4	77,0	3	3	0
Niemcy	68,9	64,9	12	9	-3
Estonia	40,4	34,3	23	23	0
Irlandia	71,9	70,0	8	6	-2
Grecja	57,3	52,0	17	16	-1
Hiszpania	52,9	47,9	19	18	-1
Francja	69,5	65,3	9	8	-1
Włochy	64,0	59,6	15	14	-1
Cypr	69,2	62,4	10	12	2
Łotwa	23,1	18,1	27	27	0
Litwa	36,1	27,5	24	24	0
Luksemburg	86,3	86,3	1	1	0
Węgry	48,4	35,5	21	22	1
Malta	53,9	44,5	18	19	1
Holandia	84,5	80,3	2	2	0
Austria	79,1	75,1	4	4	0
Polska	47,1	36,1	22	21	-1
Portugalia	60,3	51,7	16	17	1
Rumunia	26,3	18,8	26	26	0
Słowenia	72,3	63,7	7	11	4
Słowacja	51,2	37,0	20	20	0
Finlandia	72,4	68,9	6	7	1
Szwecja	78,6	74,8	5	5	0
Wielka Brytania	64,7	61,3	14	13	-1

Źródło: obliczenia własne.

5. PODSUMOWANIE

Zaproponowana metoda pozwala na zredukowanie efektu tzw. ważenia mimowolnego. Procedura ustalania porządku obiektów wielocechowych ma charakter iteracyjny i pozwala na ustalenie kolejnego obiektu najlepszego spośród tych, którym jeszcze nie nadano rangi. Każdy obiekt porównywany jest tylko do tych, którym jeszcze nie zostały przyporządkowane wyższe pozycje w klasyfikacji obiektów wielowymiarowych. Ponieważ punkty odniesienia (które można traktować jako współrzędne wzorca) zmieniają się w trakcie ustalania hierarchii obiektu, zatem zaproponowano nowy sposób ustalania wartości wskaźnika agregatowego.

LITERATURA

- Grabiński T., (1985), Metody określania charakteru zmiennych w wielowymiarowej analizie porównawczej, *Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Krakowie*, 213, 35–63.
- Hellwig Z., (1968), Zastosowanie metody taksonomicznej do typologicznego podziału krajów ze względu na poziom ich rozwoju oraz zasoby i strukturę wykwalifikowanych kadr, *Przegląd Statystyczny*, 15 (4), 307–326.
- Nardo M., Saisana M., Saltelli A., Tarantola S., Hoffman A., Giovannini E., (2005), *Handbook on Constructing Composite Indicators*, OECD Statistics Working Papers, 2005/03.
- Ranking szkół wyższych Perspektywy 2015*, <http://www.perspektywy.pl/RSW2015/>.
- Sen A., (2000), A Decade of Human Development, *Journal of Human Development*, 1 (1), 17–23.
- Sokołowski A., Sobolewski M., (2016), O niewłaściwym wykorzystaniu współczynnika zmienności, XXXV Konferencja Naukowa Multivariate Statistical Analysis (MSA 2016), książka streszczeń.
- ul Haq M., (2003), The Birth of the Human Development Index, w: Fukuda-Parr S., Shiva Kuma A. K., (red.), *Readings in Human Development*, Oxford University Press, Oxford, 127–137.

ITERACYJNA METODA
LINIOWEGO PORZĄDKOWANIA OBIEKTÓW WIELOCECHOWYCH

Streszczenie

W porządkowaniu liniowym obiektów wielocechowych najpopularniejszą metodą doprowadzania danych do porównywalności jest transformacja zmiennych do przedziału $[0;1]$ z jednoczesną zamianą destymulant na stymulanty. W tym przekształceniu wykorzystuje się zaobserwowane najmniejsze i największe wartości zmiennych. Jeżeli występują wartości odstające, lub rozkład zmiennej jest bardzo asymetryczny to w efekcie mamy do czynienia ze sztucznym ważeniem tej zmiennej. Przy asymetrii prawostronnej zmienna sztucznie zyskuje na zaznaczeniu, a przy lewostronnej – traci. W pracy zaproponowano nową, iteracyjną metodę porządkowania obiektów wielocechowych, która pozwala na ominięcie omówionej niedogodności metody klasycznej. Dalsze pozycje w rankingu wyznacza się kolejno, po jednej w każdej iteracji, a przyporządkowany obiekt jest eliminowany ze zbioru, w którym poszukujemy obiektu następnego w kolejności. Taka procedura wymagała również zaproponowania nowego sposobu wyznaczania wskaźnika agregatowego.

Słowa kluczowe: porządkowanie liniowe, wskaźniki agregatowe

ITERATIVE METHOD FOR LINEAR ORDERING OF MULTIDIMENSIONAL OBJECTS

Abstract

Transformation into $[0;1]$ interval combined with changing destimulants into stimulants is the most popular method for standardizing variables used in linear ordering of multidimensional objects. Minimum and maximum values are used as reference points. Outliers and very skewed distributions result in artificial weighing of variables, imposing higher relative importance of the variable with positive skewness and lower with negative skewness. A new linear ordering procedure is proposed to overcome this problem. Ranking positions are identified one at a time, and assigned object is then eliminated from the lot. Such iterative procedure needs a new method for obtaining composite indicators, and it is also proposed in the paper.

Keywords: linear ordering, composite indicators